

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики
А.М. Райгородский**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Конкретная дифференциальная топология
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Математика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составили:

А.Д. Рухович, ассистент

А.Б. Скопенков, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 12.02.2024

Аннотация

Изучаются важнейшие наглядные объекты математики: поверхности (в т.ч. многомерные) и векторные поля на них. Основное содержание курса – демонстрация базовых идей алгебраической и дифференциальной топологии на примере решения классических проблем о существовании и классификации векторных полей (и их обобщений). Вслед за великими математиками участники откроют некоторые основные понятия и теоремы топологии (гомологические группы, расслоения и характеристические классы), что поможет им совершить собственные настолько же полезные открытия.

Основные идеи показываются на простейших частных случаях ("олимпиадных" примерах), свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого и курс становится доступным для начинающих, и удастся быстро добраться до интересных сложных теоретически важных результатов. Для изучения курса достаточно владеть основами анализа нескольких переменных, основами топологии двумерных поверхностей, и гомотопической классификацией отображений окружности в себя.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- освоение основных современных методов конкретной дифференциальной топологии.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области конкретной дифференциальной топологии;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области конкретной дифференциальной топологии;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области конкретной дифференциальной топологии.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории части дифференциальной топологии;
- современные проблемы соответствующих разделов дифференциальной топологии;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дифференциальной топологии.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком дифференциальной геометрии и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Обзор наглядных результатов и применений топологии	6	6		15
2	Ориентируемость двумерных многообразий: гомологии и первый класс Штифеля-Уитни. Гомологии и форма пересечений двумерного многообразия.	6	6		15
3	Определение гладкого многообразия, многообразия с краем, подмногообразия.	6	6		15
4	Критерий Хопфа существования ненулевого касательного векторного поля на поверхности. Эйлера характеристика.	6	6		15
5	Существование ортонормированных систем векторных полей	6	6		15
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

1. Обзор наглядных результатов и применений топологии

Появление теоретико-числовых свойств размерности в топологических задачах.

2. Ориентируемость двумерных многообразий: гомологии и первый класс Штифеля-Уитни. Гомологии и форма пересечений двумерного многообразия.

Определение и примеры двумерных поверхностей в евклидовом пространстве. Критерий Эйлера-Пуанкаре существования ненулевого касательного векторного поля на поверхности.

3. Определение гладкого многообразия, многообразия с краем, подмногообразия.

Способы локального задания подмногообразий. Связность. Ориентируемость. Гладкие отображения многообразий.

4. Критерий Хопфа существования ненулевого касательного векторного поля на поверхности. Эйлерова характеристика.

Векторные поля на трехмерной сфере и отображения трехмерной сферы в двумерную. Отображение Хопфа. Инвариант Хопфа.

5. Существование ортонормированных систем векторных полей

Теорема Штифеля о параллелизуемости трехмерных многообразий.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : [учебник для вузов] / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко .— М. : Факториал Пресс, 2000 .— 448 с.

Дополнительная литература

1. Линейная алгебра [Текст] : учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк .— 3 - е изд., доп. — М. : Наука, 1984 .— 295 с.
2. Алгебра [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / С. Ленг ; пер. с англ. Е. С. Голда ; под ред. А. И. Кострикина .— М. : Мир, 1968 .— 564 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не требуется.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение дисциплины требует:

- посещения студентом всех видов аудиторных занятий;
- ведения конспекта в ходе лекционных занятий;
- качественной самостоятельной подготовки к практическим занятиям, активной работы на них;
- активной самостоятельной и аудиторной работы студента;

- своевременной сдачи преподавателю заданий по аудиторным видам работ.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: Математика
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра дискретной математики
курс: 2
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчики:

А.Д. Рухович, ассистент

А.Б. Скопенков, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Конкретная дифференциальная топология» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории части дифференциальной топологии;
- современные проблемы соответствующих разделов дифференциальной топологии;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дифференциальной топологии.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком дифференциальной геометрии и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Дважды двойственное пространство.
2. Двойственное линейное отображение.
3. Теорема о совпадении действий в когомологиях для гомотопных отображений.
4. Способы локального задания подмногообразий.
5. Гладкие отображения многообразий.
6. Формула Стокса.
7. Поднятие и опускание индекса.
8. Ковариантное дифференцирование: тензорность, формула Лейбница.
9. Гладкие тензорные поля.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Проективизация векторного пространства. Проективное пространство RP^n . Однородные координаты. Аффинные карты.
2. Двойственное пространство к линейному пространству. Дважды двойственное пространство. Двойственное линейное отображение.
3. Тензорное произведение пространств: различные определения, их эквивалентность.
4. Пространства $Tensp_q(V)$. Операции над тензорами. Симметрирование и альтернирование. Пространства симметрических и кососимметрических тензоров. Операция внешнего произведения кососимметрических форм.
5. Определение гладкого многообразия, многообразия с краем, подмногообразия. Способы локального задания подмногообразий. Связность. Ориентируемость. Гладкие отображения многообразий. Погружения, вложения.
6. Касательное пространство. Базис в нём, задаваемый локальной системой координат. Индуцированное действие гладкого отображения многообразий на касательных пространствах.
7. Тензоры в точке на многообразии. Возможность переноса между образом и прообразом при гладком отображении многообразий. Гладкие тензорные поля.
8. Дифференциальные формы на многообразии. Операция дифференцирования. Её свойства (инвариантность, $dd = 0$, формула Лейбница, коммутирование с операцией обратного образа формы).
9. Разбиение единицы. Теорема Уитни о вложении.
10. Интегрирование дифференциальных форм. Формула Стокса.
11. Риманова метрика. Поднятие и опускание индекса. Существование на ориентируемом римановом многообразии формы объёма, согласованной с метрикой.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.